

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра химической кибернетики

Курсовая работа
по численным методам
Уравнения переноса
Вариант 9

Выполнил:

ст.гр.

Проверил:

Уфа 2008

1. Постановка задачи:

Исследовать квазилинейное уравнение переноса с линейной псевдовязкостью $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$ (*); Показать, что среди решений есть сглаженная ударная волна; составить какую-нибудь разностную схему.

$$u_\varepsilon(x, t) = \frac{(a + b \exp[(\frac{a-b}{2\varepsilon}) * (x - x_0 - D)])}{(1 + \exp[(\frac{a-b}{2\varepsilon}) * (x - x_0 - D)])}, D = \frac{1}{2} * (a + b) (**);$$

2. Решение:

Уравнение (*) напоминает уравнение теплопроводности, все решения которого многократно дифференцируемы.

Выясним, нет ли среди гладких решений типа(**) уравнения (*) такое, которое напоминало бы ударную волну. Уравнение (*) можно представить в виде :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 (***); Будем искать решение в виде бегущей волны :$$

$$u_\varepsilon(x, t) = f(x - x_0 - Dt) ;$$

Подставляя его в (***), получим :

$$(\varepsilon f'' + f - D)f' = 0 ;$$

Приравнявая каждый из сомножителей нулю, получим два типа решений:

$$f_1 = const ;$$

$$f_2 = D + const * \sin\left(\frac{x - x_0 - Dt}{\sqrt{\varepsilon}}\right) ;$$

Из них можно получить решение, похожее на размытую волну шириной $\sim \sqrt{\varepsilon}$:

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \frac{a+b}{2}, & \text{при } x - x_0 - Dt < \frac{-\pi\sqrt{\varepsilon}}{2} \\ \frac{a+3b}{4} - \frac{a-b}{4}, & \text{при } -\frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{2} < x - x_0 - Dt < \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{2} \\ b, & \text{при } x - x_0 - Dt > \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{2} \end{cases}$$

Это решение не только непрерывно, но даже имеет кусочно-непрерывную

вторую производную. При $\epsilon \rightarrow 0$ оно переходит в ударную волну:

$$u_\epsilon = \begin{cases} \frac{a+b}{2}, & \text{при } x - x_0 - Dt < 0 \\ b, & \text{при } x - x_0 - Dt > 0 \end{cases} \quad (***)$$

$$\text{или: } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Таким образом, и гладкие и разрывные решения исходного уравнения (***) можно рассматривать как предел соответствующих гладких решений уравнения при $\epsilon \rightarrow 0$. Значит, вместо численного решения квазилинейного уравнения переноса можно численно решать уравнение (***) при достаточно малом ϵ . В уравнении (***) имеется сильный разрыв.

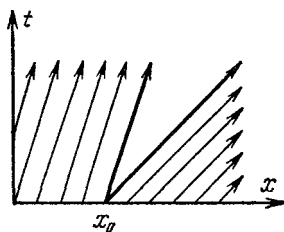
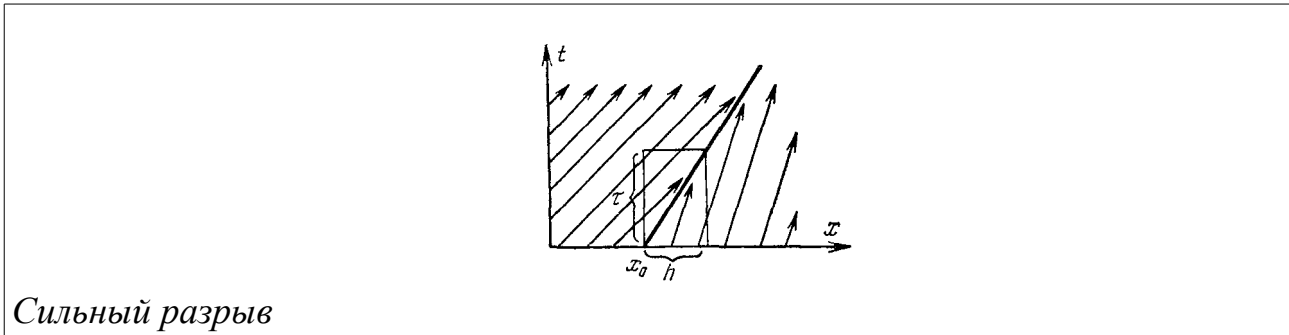


График уравнения (***) без использования псевдовязкости.

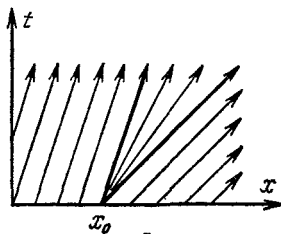


График уравнения (***) с использованием псевдовязкости или график уравнения (*).

Таким образом, добавление такой «малой» величины ϵ к исходному уравнению приводит к тому, что его разрывные решения превращаются в непрерывные и достаточно гладкие. Только к таким уравнениям можно составлять разностные

схемы.

Разностные схемы для аппроксимации частных производных:

$$1) \frac{\partial u(x_k, t_i)}{\partial t} = \frac{u(x_k, t_{i+1}) - u(x_k, t_i)}{\tau} - \frac{\tau}{2} * \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(1)})}{\partial t^2} \quad (1);$$

, где $t_i < t_i^{(1)} < t_{i+1}; \tau > 0; t_i = i * \tau; x_k = k * h$;

$$2) \frac{\partial^2 u(x_k, t_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{k+1}, t_i) - 2u(x_k, t_i) + u(x_{k-1}, t_i))}{h^2} - \frac{h^2}{12} * \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i^{(4)})}{\partial x^{(4)}} \quad (2), \text{ где}$$

, где $x_{k-1} < x_k^{(1)} < x_{k+1}$;

Теперь составим разностную схему частных производных функции u по переменным x, y и t . Рассмотрим отыскание решение $u(x, t)$ одномерного

уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi(x, t)$ с условием $t=0$:

$u(x, t)|_{t=0} = \psi(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}; t > 0$;

Здесь $u(x_k, t_i)$ - точное значение функции $u(x, t)$ в узле (x_i, t_i) , u_k - соответствующее ему приближенное значение функции.

Явная схема.

Подставив вместо $\partial u / \partial t$ и $\partial^2 u / \partial t^2$ их разностные аналоги (1) и (2) , получим разностное уравнение (общее для всех уравнений теплопроводности) :

$$\frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} - \frac{u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}}{h^2} = f_i^k,$$

$u_k^0 = \Psi_k$, $k = \overline{1, M-1}$ - начальное условие при $t=0$;

Тогда для функции (***) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\tau} - \frac{\varepsilon}{h^2} (u_k^{i+1} - 2u_k^i + u_k^{i-1}) + \frac{u_k^i (u_k^i - u_{k-1}^i)}{h} = 0, \\ u_k^0 = \Psi_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N-1 \end{array} \right. \quad (3);$$

(где $r_{ki}(h) = \frac{-\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_k, t_i^{(1)})}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^4} - \frac{h}{2} * \frac{\partial^2 u(x_k^{(1)}, t_i)}{\partial x^{(2)}}$ - погрешность

аппроксимации.)

Разностная схема (3) позволяет по значениям на нулевом слое

$$u_k^0, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N - 1 \text{ вычислить значение } u_k^1 .$$

Итак, получаем (выражаем u_k^{i+1}):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^{i+1} = \frac{\tau}{h^2} (u_{k+1}^i - u_k^i) - (1 - 2\tau/h^2) * u_k^i + \tau \frac{u_k^i (u_k^i - u_{k-1}^i)}{h}, \\ u_k^0 = \Psi_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N - 1 \end{array} \right. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет в явном виде получить решение $u(x_k, t_i)$. При этом для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы $\tau/h^2 < 1/2$ (Коэффициент псевдовязкости обычно связывается с шагом сетки для ее устойчивости.);

Теперь найдем разностную схему для области $D \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T$;

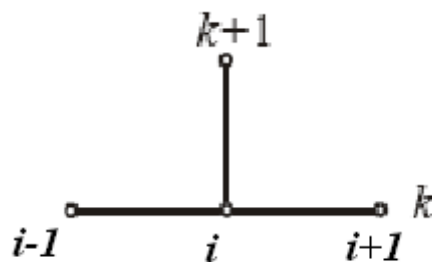
$$u_k^0 = \Psi_k ; \quad 0 \leq x \leq a ;$$

Зададим граничные условия:

$$\left[\alpha_0(t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_0(t)u \right]_{x=0} = \eta_0(t) ;$$

$$\left[\alpha_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1(t)u \right]_{x=a} = \eta_1(t) ;$$

Шаблон явной разностной схемы .



Аппроксимируем граничные условия (порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$):

$$\alpha_0^i \frac{u(x_1, t_i) - u(x_0, t_i)}{h} + \beta_0^i u(x_0, t) = \eta_0^i + \alpha^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial x^2} ;$$

$$\alpha_1^i \frac{u(x_M, t_i) - u(x_{M-1}, t_i)}{h} + \beta_0^i u(x_M, t) = \eta_1^i + \alpha^i \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_M, t)}{\partial x^2} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0^i \frac{u_1^i - u_0^i}{h} + \beta_0^i u_0^i = \eta_0^i \\ \alpha_1^i \frac{u_M^i - u_{M-1}^i}{h} + \beta_1^i u_M^i = \eta_1^i \end{array} \right\} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_0^i}{h} u_1^i + (\beta_0^i - \alpha_0^i/h) u_0^i = \eta_0^i \\ (\beta_0^i + \alpha_1^i/h) u_M^i - \frac{\alpha_1^i}{h} u_{M-1}^i = \eta_1^i \end{array} \right\} ;$$

Получили явную разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^{i+1} = \frac{\tau}{h^2} (u_{k+1}^i - u_k^i) - (1 - 2\tau/h^2) * u_k^i + \tau \frac{u_k^i (u_k^i - u_{k-1}^i)}{h}, \\ u_k^0 = \Psi_k \\ u_1^{i+1} = (1 - h\beta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1}) u_0^{i+1} + h\eta_0^{i+1}/\alpha_0^{i+1} \\ u_M^i = (1 - h\beta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1}) u_M^{i+1} + h\eta_1^{i+1}/\alpha_1^{i+1} \end{array} \right\}, \text{ где } i = \overline{0, N-1} \quad (5)$$

Система (5) аналогична системе уравнений (4), только здесь добавляется граничные условия.

Алгоритм нахождения $u(x_k, t_i)$, **ограниченной** $t \in [0, T]; x \in [0, a]$;

По условию устойчивости: $\tau/h^2 < 1/2 \Rightarrow$ шаг будет: $\tau < h^2/2 = 1/8 = 0,1$;

$$\varphi_k^i = x_k + t_i, \text{ где } t_i = \tau_i; x_k = k * h ;$$

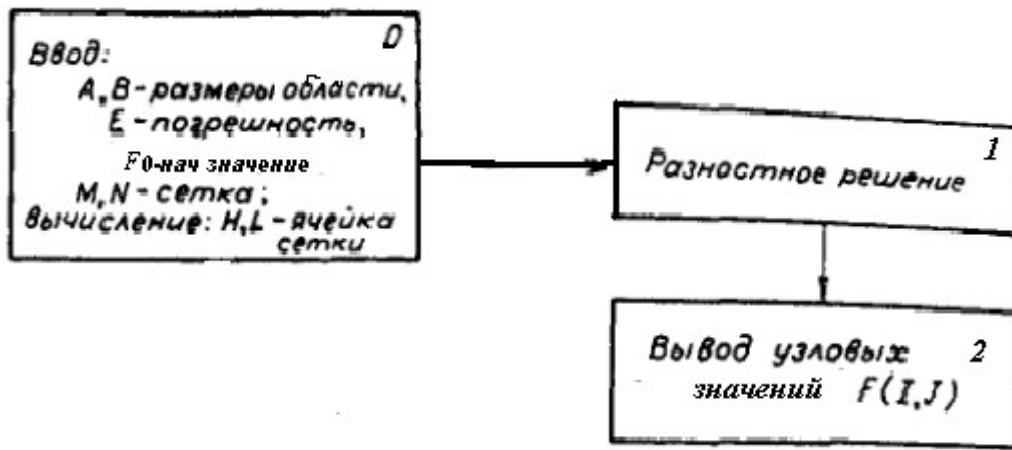
$$x_k = k/2; t_i = 0,1 * i ; \text{ с учетом } h \text{ и } \tau : \varphi_k^i = k/2 + 0,1 * i \text{ и } u_k^0 = \Psi_k \text{ (нач. условие)}$$

\Rightarrow находим $u_k^0 = \dots$; Затем находим на 1-м слое:

$$u_k^1 = 1/h^2 * \tau (u_{k+1}^0 - u_{k-1}^0) + (h^2 - 2\tau) * u_k^0 + \tau \varphi_k^0 ; \text{ на 2-м } u_k^2 = \dots \text{ и тд. Результаты}$$

желательно представить в виде таблицы.

Блок-схема в общем случае представляет собой:



Итерационный процесс по формуле завершается при выполнении в каждом узле сетки условия : $I \varphi_{k+1}^i - \varphi_k^i I < \varepsilon$;

3. Вывод

Схема (3) нелинейна, поэтому будет происходить рост погрешностей. Чтобы обеспечить хорошую точность расчета зона сглаживания разрыва должна быть очень маленькой (на много меньше по сравнению с общим числом узлов).

Псевдовязкость вида (***) обеспечивает при очень малом ε К решения

уравнения (*) и(**) в дивергентной форме (ударная волна) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2})=0$.Так

же в уравнении (***) используется линейная псевдовязкость. Так что все решения уравнения (***) многократно дифференцируемы. Но здесь есть свои *недостатки*: коэффициент псевдовязкости связан с шагом сетки (разностная схема явная) $\varepsilon = \nu h$, иначе разносная схема (4) или (5) окажется неустойчивой!

По своей сути в уравнения вида $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ добавляется

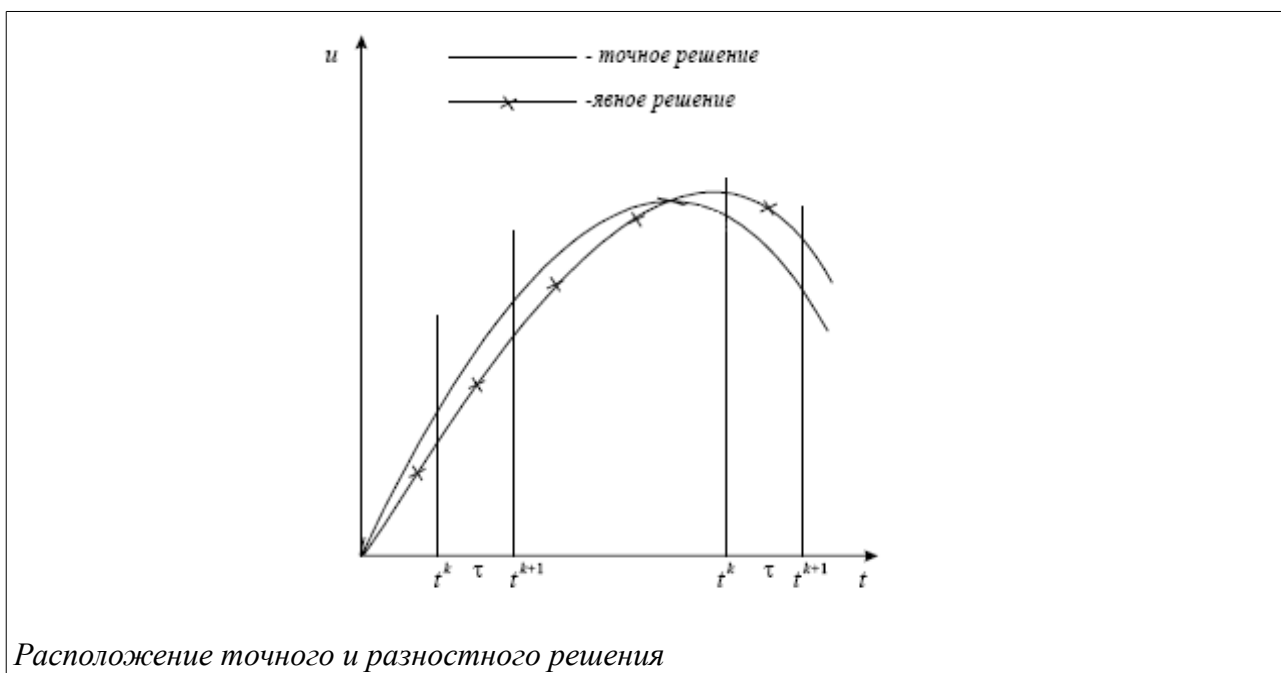
коэффициент ε (Разрыв сглаживается со временем. Но след разрыва остается: на некоторых характеристиках производные решения будут разрывны. Во всех остальных точках решение будет гладким, если начальные данные были гладкими.),а дальше такое квазилинейное уравнение решается так же как и

обычное уравнение переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \text{grad} u = f(x, t)$ (где $c(x, t)$ - обычно

константа) : составлением разностной схемы. При этом при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{сводится к} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
, а уравнение сглаженной

ударной волны к уравнению ударной волны. В целом при численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимость. Однако достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость и, в случае положительного ответа, сходимость будет обеспечена. К тому же у решений разностной схемы (5) есть *особенность*: разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, т.к. $u(x_k, t_i)$ определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени (при возрастающем решении).



Расположение точного и разностного решения

Список использованной литературы:

- 1) «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ» Н. Н. Калиткин ;
- 2) Краскевич «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»;
- 3) www.uchites.ru «Численное решение дифференциальных уравнений с частными производными» ;
- 4) МУДРОВ А.Е. Численные методы для ПЭВМ